Math. Ann. 277, 727–734 (1987)

Mathematische Annalen

La propriété du point fixe dans les espaces de Banach avec base inconditionnelle

M. A. Khamsi

Equipe d'Analyse, Université Paris VI, Tour 46, 4, Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France

Introduction

Soit K un convexe faiblement compact d'un espace de Banach X. On dira que K a la propriété du point fixe (f.p.p.) si pour toute contraction $T: K \to K$ (i.e. $\|T(x)-T(y)\| \leqq \|x-y\|$ pour tout x, y dans K) a un point fixe. On dira alors que X a f.p.p. si et seulement si tout convexe faiblement compact de X a f.p.p. Il est connu que L_1 n'a pas f.p.p. [1]. D'autre part, Kirk [6] a, en 1965, montré que si un convexe faiblement compact a la structure normale, alors il a f.p.p. Des résultats surprenants ont été apportés par Maurey concernant les espaces L_1 et c_0 et relancent la grande question qui est de savoir si les super-réflexifs ont f.p.p. Maurey [10] utilisa la technique des ultra-produits pour montrer que les sous-espaces réflexifs de L_1 ont f.p.p. S'inspirant de la démonstration de Maurey, Lin [7] réussit à montrer que si un espace a une base inconditionnelle dans la constante d'inconditionnalité λ est strictement inférieur à 1,37, a f.p.p.

Dans cet article, on va étudier quelques relations entre la propriété du point fixe et la propriété de Banach-Saks.

Définitions et notations

Définition 1. Dans tout ce qui suit, X désignera un espace de Banach. On dira que la suite (e_i) est une base de Schauder de X si et seulement si pour tout x dans X il existe une suite unique de scalaire (x_i) tel que $x = \Sigma x_i e_i$.

La base de Schauder (e_i) est dite inconditionnelle si et seulement si la constante $\lambda = \sup\limits_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ \|\Sigma a_i e_i\| \leqq 1}} \|\Sigma a_i \varepsilon_i e_i\|$ est finie.

Dans le cas où la base est inconditionnelle, on lui associe une deuxième constante c définie par:

$$c = \sup_{F \in \mathscr{P}(N)} \|P_F\| \quad \text{ou} \quad P_F(\Sigma a_i e_i) = \sum_{i \in F} a_i e_i$$

Il est connu que: $c \leqq \lambda \leqq 2c$.

Définition 2. Soit (x_n) une suite bornée sans sous-suite convergente. Brunel et Sucheston [3] ont montré que (x_n) a une sous-suite (x'_n) dite une «bonne sous-suite», tel que:

$$L(x, a_i) = \lim_{\substack{n'_1 < n'_2 < \ldots < n'_k \\ n'_1 \to \infty}} \left\| x + \Sigma a_i x_{n'_i} \right\|$$

existe pour tout $x \in X$ et pour tout $(a_i) \in R^k$. Notre hypothèse sur (x_n) implique que L définit une norme sur $X \times R^{(N)}$.

Le modèle étalé sur (x_n) au dessus de x est le complété pour cette norme de l'espace $R_x \times R^{(N)}$ (ou R_x est la droite engendrée par x). Il sera noté: $(D, d, (d_i))$.

Dans le cas oû $x = 0$ le complété de l'espace $R^{(N)}$ pour la norme L, que l'on notera $(F, (e_i))$, est appelé le modèle étalé de X sur la suite (x_n). La suite (e_i) est appelée la suite fondamentale du modèle F.

On dira que X a $M-(P)$, lorsque (P) désigne une propriété banachique, si et seulement si tout modèle étalé $(F, (e_i))$ a la propriété (P).

Définition 2'. L'espace X a la propriété de Banach-Saks-Alterné (A.B.S.) si et seulement si de toute suite bornée (x_n) on peut extraire une sous-suite (x'_n) dont les moyennes alternées $\left(\frac{1}{n} \Sigma (-1)^k x'_k\right)$ convergent.

Beauzamy a caractérisé dans [2] les espaces qui ont A.B.S. comme étant ceux qui n'ont pas l_1 pour modèle étalé.

Remarques. 1) Tous les modèles étalés de c_0 sont isomorphes à c_0.

2) Tous les modèles étalés de l'espace de Tzirelson T sont isomorphes à l_1 alors que les modèles étalés de son dual T^* sont isomorphes à c_0.

Rappelons les deux résultats dont on se servira dans la démonstration du théorème 3).

Lemme (G.L.) [4]. *Soit (x_n) une suite étalante et (e_n) la suite fondamentale du modèle F construit sur cette suite.*

Supposons que (e_n) ne soit pas équivalente à la base canonique de l_1. Alors (x_n) converge faiblement dans X si et seulement si (e_n) converge faiblement dans F et la limite est la même.

Lemme (B) [2, p. 24]. *Si (x_n) converge faiblement vers 0 dans X, alors la suite fondamentale du modèle étalé construit sur (x_n) est basique inconditionnelle.*

Définition 3. Soit $\mathscr{U}$ un ultra-filtre non trivial sur N. Soit $\tilde{X} = l_\infty(X)/\mathscr{N}$ ou

$$\mathscr{N} = \{(x_n) \in l_\infty(X);\ \lim_{\mathscr{U}} \|x_n\| = 0\}\ .$$

$\tilde{X}$ est un espace de Banach, dit ultrapuissance de X.

$\tilde{X}$ a des propriétés de prolongement qui sont très riches. En effet soit A une partie de X, on lui associe, de manière canonique, la partie $\tilde{A}$ de $\tilde{X}$ définie par: $\tilde{A} = \{\tilde{x} \in \tilde{X};\ \tilde{x} = (x_n) \text{ et } x_n \in A\}$. Si $T: A \to X$ est une application, alors on définit de manière canonique $\tilde{T}: \tilde{A} \to \tilde{X}$ par: $\tilde{T}(\tilde{x}) = \tilde{T}(x_n) = (T(x_n))$.

Beaucoup de propriétés géometriques passent de (A, T) à $(\tilde{A}, \tilde{T})$.

Définition 3'. On dira que X a super-P si et seulement si toutes les ultrapuissances de X ont (P).

Définition 3". Soit $T: C \to X$ une contraction et C un convexe fermé borné de X. On dira que T est de type (γ) si et seulement si il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que: $\forall (x,y) \in C \times C$:

$$\gamma\left(\left\|T\left(\frac{x+y}{2}\right)-\frac{T(x)+T(y)}{2}\right\|\right) \leqq \|x-y\| - \|T(x)-T(y)\| \ ,$$

ou $\Gamma = \{\gamma : \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}_+,\ \gamma$ continu et $\gamma(r)=0$ si et seulement si $r=0\}$.

Résultats de base

Soit C un convexe faiblement compact de X. Soit d'autre part T une contraction de C dans lui-même. Il est clair que la classe des convexes fermés D tels que $D \subset C$ et $T(D) \subset D$ admet des éléments minimaux. Nous appellerons un tel élément minimal un convexe minimal pour T. Si T n'admet pas de point fixe, un convexe minimal pour T n'est pas réduit à un point.

Sous les hypothèses précédentes, T a toujours une suite quasi-fixe de points (x_n) de C (i.e. $\lim_n \|T(x_n)-x_n\|=0$).

Karlovitz [5] a montré le lemme fondamental:

Lemme (Ka). *Soit K un convexe faiblement compact minimal pour T. On a pour tout $x \in K$ et pour toute suite quasi-fixe (x_n)*

$$\lim_n \|x-x_n\| = \operatorname{diam}(K) \ .$$

Utilisation des ultrapuissances. On considère $\tilde{K}$ et $\tilde{T}$ dans $\tilde{X}$, une ultrapuissance de X, associés à K et T.

$\tilde{K}$ est un convexe fermé borné avec diam $\tilde{K}$ = diam K. D'autre part si (x_n) est une suite quasi-fixe pour T, alors $\tilde{T}(\tilde{x})=\tilde{x}$ ou $\tilde{x}=(x_n)$. Réciproquement si $\tilde{x}$ est un point fixe de $\tilde{T}$, alors $\tilde{x}$ est représenté par une suite (x_n) quasi-fixe. Maurey [10] a montré le lemme suivant:

Lemme (Ma). *L'ensemble des points fixes de $\tilde{T}$ est métriquement convexe (i.e. $\forall \beta \in [0,1]$ et $\forall (\tilde{x},\tilde{y})$ points fixes pour $\tilde{T}$, alors il existe $\tilde{z}$, un point fixe de $\tilde{T}$, tel que:*

$$\|\tilde{x}-\tilde{z}\| = \beta\|\tilde{x}-\tilde{y}\| \quad et \quad \|\tilde{y}-\tilde{z}\| = (1-\beta)\|\tilde{x}-\tilde{y}\| \ .$$

D'autre part, P.K. Lin [8] a montré le lemme suivant dont on se servira.

Lemme (Li). *Sous les hypothèses précédentes, on a:*

1) *Si $(\tilde{x}_n)$ est une suite quasi-fixe pour $\tilde{T}$, alors*

$$\lim_n \|\tilde{x}_n - x\| = \operatorname{diam} \tilde{K} = \operatorname{diam} K$$

ou K est un convexe minimal pour T.

2) *Si $\tilde{W}$ est un sous-convexe non vide de $\tilde{K}$, invariant par $\tilde{T}$, alors*

$$\forall x \in K \ \operatorname*{Sup}_{\tilde{W}} \|\tilde{w}-x\| = \operatorname{diam} K \ .$$

Après ce rappel des résultats fondamentaux, on est en mesure de démontrer certains nouveaux résultats.

Théorème 1. *Soit X un espace de Banach. On suppose que X admet une base inconditionnelle dont les constantes c et λ vérifient:*

$$c(\lambda+2)<4 .$$

Alors X a f.p.p.

Démonstration. Supposons que X n'a pas f.p.p.

Alors il va exister K un convexe faiblement compact minimal pour T, une contraction laissant invariant K. Dans K, il va exister une suite quasi-fixe (x_n) convergente faiblement. Utilisant le lemme de Karlovitz, on peut supposer, en toute généralité, que $\operatorname{diam} K=1$ et (x_n) convgt faiblt vers $0\in K$. Par passage aux sous-suites, on peut supposer qu'il existe une suite de projecteurs (P_{F_n}) (où les F_n sont des intervalles finis disjoints de N) que l'on notera (P_n) vérifiant:

i) $P_n\circ P_m=0$ si $n\neq m$
ii) $\lim_n \|P_n(x)\|=0$ pour tout x dans X
iii) $\lim_n \|P_n(x_n)-x_n\|=0$
iv) $\lim_n \|x_{n+1}-x_n\|=1.$

Soient $\tilde{x}=(x_n)$ et $\tilde{y}=(x_{n+1})$ alors $\tilde{x},\tilde{y}$ sont des points fixes pour $\tilde{T}$ et $\|\tilde{x}-\tilde{y}\|_{\tilde{X}}=1$ d'après iv).

Soient $\tilde{P}=(P_n)$ et $\tilde{Q}=(P_{n+1})$ alors i), ii) et iii) impliquent que: $\tilde{P}(\tilde{x})=\tilde{x}$, $\tilde{Q}(\tilde{y})=\tilde{y}$ et $\tilde{P}(x)=\tilde{Q}(x)=\tilde{P}(\tilde{y})=\tilde{Q}(\tilde{x})=0$ pour tout $x\in X$. D'autre part, on a:

$$\|\tilde{x}+\tilde{y}\|=\|\tilde{P}(\tilde{x})+\tilde{Q}(\tilde{y})\|\leqq\lambda\|\tilde{P}(\tilde{x})-\tilde{Q}(\tilde{y})\|=\lambda\|\tilde{x}-\tilde{y}\|=\lambda .$$

Soit $\tilde{W}=\left\{\tilde{w}\in\tilde{K};\ \exists x\in K: \|\tilde{w}-x\|\leqq\frac{\lambda}{2} \text{ et } \operatorname{Sup}(\|\tilde{w}-\tilde{x}\|,\ \|\tilde{w}-\tilde{y}\|)\leqq 1/2\right\}$ alors $\frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}\in\tilde{W}$, $\tilde{T}(\tilde{W})\subset\tilde{W}$ et $\tilde{W}$ est un convexe inclus dans $\tilde{K}$. Le lemme de Lin implique que:

$$\operatorname*{Sup}_{\tilde{W}}\|\tilde{w}-0\|=1 .$$

Or,

$$\begin{aligned}2\tilde{w}&=(\tilde{I}-\tilde{P})(\tilde{w})+(\tilde{I}-\tilde{Q})(\tilde{w})+(\tilde{P}+\tilde{Q})(\tilde{w})\\&=(\tilde{I}-\tilde{P})(\tilde{w}-\tilde{x})+(\tilde{I}-\tilde{Q})(\tilde{w}-\tilde{y})+(\tilde{P}+\tilde{Q})(\tilde{w}-x)\end{aligned}$$

d'où

$$2\|\tilde{w}\|\leqq c\ (1/2+1/2+\lambda/2)=c(1+\lambda/2)$$

comme

$$\operatorname*{Sup}_{\tilde{W}}\|\tilde{w}\|=1 \quad \text{alors} \quad 2\leqq c(1+\lambda/2)$$

contradiction.

Remarques. 1) Si l'espace de Banach X a une base inconditionnelle fortement monotone (i.e. $c=1$) et si $\lambda<2$ alors, d'après le théorème 1, X a f.p.p.

Dans une communication personnelle, P.K. Lin m'a signalé que l'on peut déduire ce résultat à partir de la remarque 1 du théorème 3 [7].

2) Considérons l'espace X_ε défini par: soit $\varepsilon > 0$ et la norme $|\cdot|_\varepsilon$ définie sur R^3 par:

$$|(a,b,c)|_\varepsilon = (1+\varepsilon)|a+b+c| + |-a+b+c| + |a-b+c| + |a+b-c| \ .$$

$$X_\varepsilon = (R^3, |\cdot|_\varepsilon) \oplus_\infty l_{p,1} \oplus_\infty c_0$$

ou $l_{p,1}$ est l'espace l_p renormé par:

$$\|x\|_{p,1} = \|x^+\|_{l_p} + \|x^-\|_{l_p}$$

ou x^+ et x^- sont les parties positive et négative de x relatives à la structure de lattice de l_p.

$l_{p,1}$ a une base inconditionnelle dont les constantes c et λ sont égales à: $c=1$ et $\lambda = 2^{1-1/p}$.

On en déduit que X_ε a une base inconditionnelle dont les constantes c_ε et λ_ε vérifient:

$$1 < c_\varepsilon \leqq 1+\varepsilon \quad \text{et} \quad \lambda_\varepsilon = 2^{1-1/p} \ .$$

Donc si $\varepsilon < \dfrac{1-2^{1-1/p}}{1+2^{1-1/p}}$ alors X_ε a f.p.p. Rappelons que X_ε n'est pas super-reflexif.

3) On peut remplacer dans le théorème 1 ainsi que dans les remarques précédentes «base inconditionnelle» par «décomposition fini dimensionnelle inconditionnelle» (voir l'espace T défini en p. 51 de [9]). Considérons le problème suivant:

Problème. Soit X un espace de Banach avec une base 1-inconditionnelle (i.e. $\lambda = 1$). On renorme X de la manière suivante:

$$|x|_\infty = \operatorname{Max}(\|x^+\|, \|x^-\|) \ .$$

Est-ce que $(X, |\cdot|_\infty)$ a f.p.p.?

Remarque. L'espace $(X, |\cdot|_\infty)$ n'a pas la structure normale.

Une réponse partielle au problème se trouve dans le:

Théorème 2. *Soit X un espace de Banach avec une base inconditionnelle fortement monotone* ($c=1$). *On suppose que X a la propriété de Banach-Saks-Alterné. Alors X a* f.p.p.

Démonstration. Supposons que X n'a pas f.p.p. Alors, comme dans le démonstration du théorème 1, il va exister K un convexe faiblement compact minimal pour T, une contraction laissant invariant K, de même qu'une suite (x_n) faiblement convergente vers 0 et quasi-fixe ainsi qu'une suite de projecteurs (P_n) tel que:

i) $P_n \circ P_m = 0$ si $n \neq m$

ii) $\lim_n \|P_n(x)\| = 0$ pour tout x dans X

iii) $\lim_n \|P_n(x_n) - x_n\| = 0$ et $\lim_n \|x_{n+1} - x_n\| = \operatorname{diam} K = 1$.

On aura besoin du résultat suivant du à Lin [7]:

Lemme 2 (Li') *Sous les hypothèses précédentes, si $(\tilde{x}_i)$ sont n points fixes distincts de $\tilde{T}$, alors :*

$$\|\Sigma a_i \tilde{x}_i\| = \mathrm{Max}(\Sigma a_i^+, \Sigma a_i^-)$$

pour toute suite de scalaires (a_i).

$$(Avec\ a^+ = \mathrm{Max}(a,0) \quad et \quad a^- = \mathrm{Max}(-a,0)) \ .$$

Soit F le modèle étalé construit sur (x_n) et (e_i) la base fondamentale de F. Quitte à se restreindre à une sous-suite, on peut supposer que (x_n) est une «bonne suite». Soit $(\beta_i) \in R^k$ alors:

$$\|\Sigma \beta_i e_i\|_F = \lim_{\substack{n_1 < n_2 < \ldots < n_k \\ n_1 \to \infty}} \|\Sigma \beta_i x_{n_i}\|_X \ .$$

Soit $\tilde{x}_i = (x_{n+i})$ avec $1 \leqq i \leqq k$ alors les $\tilde{x}_i$ sont des points fixes de $\tilde{T}$. D'autre part, on a:

$$\lim_{n_1, \mathscr{U}} \|\Sigma \beta_i x_{n+i}\| = \lim_{\substack{n_1 < \ldots < n_k \\ n_1 \to \infty}} \|\Sigma \beta_i x_{n+i}\| \ .$$

On en déduit d'après le lemme (Li') que:

$$\|\Sigma \beta_i e_i\|_F = \|\Sigma \beta_i \tilde{x}_i\| = \mathrm{Max}(\|(\beta_i^+)\|_{l_1}, \|(\beta_i^-)\|_{l_1}) \ .$$

Donc F est isomorphe à l_1. On en conclut que X ne peut pas avoir la propriété de Banach-Saks-Alterné. Contradiction.

Soit T une contraction définie sur K, un convexe faiblement compact minimal. Pour tout $\tilde{x}$ un point fixe de $\tilde{T}$ on associe l'ensemble:

$$\tilde{C}_{\tilde{x}} = \{\tilde{x}_\beta \,;\, \tilde{x}_\beta = (x_{\beta(n)}) \quad \text{ou} \quad \beta : N \to N \quad \text{strictement croissante}\}$$

avec $\tilde{x} = (x_n)$. $\tilde{C}_{\tilde{x}}$ est inclus dans $F_{\tilde{T}}$, ou $F_{\tilde{T}}$ est l'ensemble des points fixes de $\tilde{T}$. En général $\tilde{C}_{\tilde{x}}$ n'est pas convexe. On dira alors que T est de «type-convexe» si et seulement si $F_{\tilde{T}}$ est convexe.

Si T est de type (γ) alors T est de «type-convexe». Il serait intéressant de caractériser les espaces dans lesquels toute contraction, laissant invariant un convexe faiblement compact, est de «type-convexe».

Théorème 3. *Soit K un convexe faiblement compact minimal pour une contraction T. Supposons qu'il existe (x_n) une suite quasi-fixe pour T, faiblement convergente vers* 0 *tel que, si on pose $\tilde{x} = (x_n)$, on ait :*

$$0 \quad n'appartient\ pas\ à \quad \overline{\mathrm{conv}}(\tilde{C}_{\tilde{x}}) \ .$$

Alors X n'a pas Banach-Saks-Alterné.

Démonstration. Comme 0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe fermée de $\tilde{C}_{\tilde{x}}$, Han-Banach implique qu'il existe $\delta \in]0,1]$ tel que: pour toute suite de scalaires positifs (β_i) et toute suite $(\tilde{x}_i)$ dans $\tilde{C}_{\tilde{x}}$ on ait:

$$\|\Sigma \beta_i \tilde{x}_i\| \geqq \delta(\Sigma \beta_i) \tag{$*$}$$

Soient F le modèle étalé construit sur (x_n) et (e_i) la base fondamentale de F. Comme les hypothèses sont invariantes par passage aux sous-suites, alors on peut supposer que (x_n) est une «bonne-suite». Soit (β_i) une suite de scalaires positifs, on a, par définition de F,

$$\lim_{\substack{n_1<\ldots<n_k \\ n_1\to\infty}} \|\Sigma\beta_i x_{n_i}\| = \|\Sigma\beta_i e_i\|_F$$

On considère la suite $(\tilde{x}_i)$ de $\tilde{C}_{\tilde{x}}$ définie par: $\tilde{x}_i=(x_{n_i})$. On a: $\|\Sigma\beta_i\tilde{x}_i\|_{\tilde{X}}=\|\Sigma\beta_i e_i\|_F$ car (x_n) est une «bonne-suite». D'après $(*)$ on obtient:

$$\|\Sigma\beta_i e_i\|_F \geqq \delta(\Sigma\beta_i) \tag{$**$}$$

Supposons que la suite (e_i) n'est pas équivalente à la base de l_1, alors d'après le lemme (G.L.) la suite (e_i) converge faiblement vers 0. En faisant appel au lemme (B), on en déduit que (e_i) est basique inconditionnelle.

L'inégalité $(**)$ implique que (e_i) est équivalente à la base de l_1. Contradiction.

On en conclut que (e_i) est équivalente à la base de l_1 et le résultat de Beauzamy implique que X ne peut pas avoir Banach-Saks-Alterné.

Remarques. 1) Si T est de «type-convexe», alors 0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe fermée bornée de $\tilde{C}_{\tilde{x}}$ (égale à $\tilde{C}_{\tilde{x}}$ puisque T est de «type-convexe») pour tout point fixe $\tilde{x}$ de $\tilde{T}$. On en conclut, d'après le théorème 3, que dans un espace de Banach qui a B.S.A. toute contraction de «type-convexe» laissant invariant un convexe faiblement compact a un point fixe.

2) P.K. Lin a montré (dans [7]) que, si X a une base fortement monotone ($c=1$), alors si X n'a pas f.p.p., il va exister une contraction T, un convexe K faiblement compact minimal pour T, et une suite (x_n) quasi-fixe convergente faiblement vers 0 tel que, si on pose $\tilde{x}=(x_n)$, on ait:

$$\|\tilde{w}\|=1 \quad \text{pour tout } \tilde{w} \text{ appartenant à } \quad \operatorname{conv}(\tilde{C}_{\tilde{x}}) \ .$$

Remerciement. L'auteur tient à remercier particulièrement B. Baillon, G. Godefroy, P. K. Lin et B. Maurey pour toutes les remarques qu'ils ont apportées à l'élaboration de ce travail.

Bibliographie

1. Alspach, D.: A fixed point free non expansive map. Proc. Am. Soc. **82**, 423–424 (1981)
2. Beauzamy, B., Lapreste, J.T.: Modèle étalé des espaces de Banach, Publ. Dep. Math. Lyon **1** (1983)
3. Brunel, A., Sucheston, L.: On *B*-convex Banach space. Math. Syst. Theory **7**, 294–299 (1974)
4. Guerre S., Lapreste, J.T.: Quelques propriétés des modèles étalés sur les espaces de Banach. Ann. Inst. Henry Poincaré, Nouv. ser. Sect. B 16–4, 339–347 (1980)
5. Karlovitz, L.A.: Existence of fixed point for non expansive map in space without normal structure. Pac. J. Math. **66**, 153–159 (1976)
6. Kirk, W.A.: A fixed point theorem for mappings which do not increase distance. Am. Math. Mon. **72**, 1004–1006 MR 32=6436 (1965)

7. Lin, P.K.: Unconditional bases and fixed points of non expansive mappings. Pac. J. Math. **116**, 69–76 (1985)
8. Lin, P.K.: Texas Functional Analysis Seminar 1982–1983. University of Texas (189–205)
9. Lindenstraus, J., Tzafriri, L.: Classical Banach spaces. I. Sequence spaces. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1977
10. Maurey, B.: Points fixes des contractions sur un convexe fermé de L^1. Sémin. Anal. Fonct. 80–81 (1980)

Reçu le 30 octobre 1986; version révisée reçu le 21 janvier 1987